دوفصلنامه مطالعات برنامه درسی آموزش عالی

سال ۶، شماره ۱۲، پاییزوزمستان ۱۳۹۴، ۱۷۲ -۱۵۳

Journal of Higher Education Curriculum Studies Vol.6, No.12 , 153-172

تبیین مفهومی تفکر ریاضی: چیستی، چرایی و چگونگی

Conceptual Account of Mathematical Thinking: What, Why & How

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۲/۱۱، **تاریخ ارزیابی**: ۱۳۹۴/۴/۱۳، **تاریخ پذیرش مقاله**: ۱۳۹۴/۵/۱۵

دکتر فرشته زینی‌وندنژاد[۱]

چکیده: همه دانش‌آموزان می‌توانند به صورت ریاضی‌وار فکر کنند و عمق و پیچیدگی ایده‌های ریاضی خود را به عنوان هدف مهم آموزش ریاضی، افزایش دهد. هر چند این مهم هنوز به طور گسترده، در کلاس‌های ریاضی اتفاق نیفتاده است، زیرا ارتقای تفکر ریاضی با چالش‌هایی روبروست که یکی از آن‌ها، تبیین مفهومی تفکر ریاضی است. لذا این مطالعه، بر آن است که چیستی، چرایی و چگونگی چالش‌های تفکر ریاضی را از طریق مرور رویکردهای مختلف به تفکر ریاضی، تبیین کند. ، به طور نظام‌وار مرور شده و مورد نقد و بررسی قرار گرفته‌اند. از بین رویکردهای موجود، توصیف ریاضی‌دانان از تفکر ریاضی برای تبدیل آن به فعالیت‌های یاددهی و یادگیری ریاضی، به تفصیل شرح و بسط داده شده است. علاوه براین، چالش‌های پیش رو برای توسعه تفکر ریاضی نیز بیان شده است. این مقاله، چشم‌انداز روشنی برای محققان آموزشی در حالت کلی و برای محققان آموزش ریاضی در حالت خاص، ترسیم می‌کند.

کلمات کلیدی: تفکر ریاضی، ریاضی‌دانان، محققان آموزش ریاضی، فعالیت‌های یاددهی- یادگیری، کلاس درس ریاضی.

Dr. Fereshteh Zeynivand Nezhad

Abstract: All students can learn to think mathematically and increase the depth and complexity of their ideas as the main goal of mathematics education. However, there are various challenges in achieving this goal extensively in mathematics classrooms due to the need for conceptual Account of mathematical thinking. Therefore, this study intends to give a more clear account of what are the challenges of mathematical thinking, why they matter and how they might be overcomed. For this purpose, different approaches to mathematical thinking were systematically and critically reviewed. Among those, the paper emphasized on mathematician's account of mathematical thinking and the ways in which, it can be transferred into teaching- learning activities, has articulated. In addition, the challenges of developing mathematical thinking are discussed. This paper has aimed to depict a more clear perspective for educational researchers in general and mathematics education researchers in particular.

Keywords: Mathematical thinking, Mathematicians, Mathematics Education Researchers, Teaching- Learning Activities, Mathematics Classroom.

۱. دکترای آموزش ریاضی f_zeynivand@yahoo.com

۱. مقدمه

تفکر ریاضی، یکی از مهم‌ترین اهداف آموزش ریاضی است که نقشی اساسی در ارتقای یادگیری مفهومی بازی می‌کند. برخی از توصیف‌های موجود از تفکر ریاضی بر روش‌های حل مسئله تأکید می‌کنند، در حالی‌که بعضی دیگر، بر توسعه درک مفهومی ریاضی تمرکز دارند (واتسن[۱]، ۲۰۰۱). ولی در هر دو صورت، تفکر ریاضی به عنون یکی از انواع تفکر شناخته می‌شود که دارای زبان خاص و ویژگی‌های انتزاعی منحصر به فرد است. به دلیل این ویژگی‌ها، آموزش ریاضی، یکی از اصلی‌ترین چالش‌های نظام‌های آموزشی است و بورتون[۲] (۱۹۹۴) بر این باور است که تنها، تعداد اندکی از دانش‌آموزان، در درس ریاضی موفق‌اند و تفکر ریاضی در اکثرشان، توسعه نیافته است. آنان یکی از موانع را، تأکید زیاد نظام‌های آموزشی را بر محتوای ریاضی در مقابل فرآیند توسعه تفکر ریاضی می‌دانند.

از طرفی، به خاطر اهمیت نقش ریاضی در توسعه علوم و فناوری، آموزش ریاضی توجه محققان زیادی را جلب کرده است و حتی بعضی از آن‌ها ادعا کرده‌اند که بین آموزش ریاضی و توسعه زندگی، رابطهٔ مستقیمی وجود دارد (کلمنتس و الرتن[۳]، ۱۹۹۶). بدین سبب «شورای معلمان ریاضی آمریکا[۴]» (NCTM) در سال ۲۰۰۰، اعلام کرد که دانش‌آموزان، باید ریاضی را برای زندگی و به‌عنوان یک میراث فرهنگی، برای محیط کار و نیز جامعه فنی و علمی، یاد بگیرند. هم-چنین، این شورا بیان نمود که «کمک به همه دانش‌آموزان برای توسعه توانایی‌های ریاضی»، از اهداف آموزش ریاضی است و «همه دانش‌آموزان می‌توانند یاد بگیرند که ریاضی‌وار، فکر کنند» (ص ۲۱)، اگرچه بسیاری از پژوهشگران دریافته‌اند که در تدریس ریاضی، هنوز این هدف محقق نشده است (یوداریا و تال[۵]، ۱۹۹۸؛ زینی‌وندنژاد و همکاران[۶]، ۲۰۱۳). به دلیل این تنوع در برداشت، در این مقاله، تلاش شده است تا چیستی، چرایی و چگونگی توسعه تفکر ریاضی از چند دیدگاه، تبیین شود.

1 Watson
2 Burton
3 Clements and Ellerton
4 National Council of Teachers of Mathematics: NCTM
5Yudariah and Tall
6Zeynivandnezhad et al.

۲. تفکر ریاضی[1]

اصطلاح تفکر ریاضی، دارای معانی متعدی است. مثلاً برای توصیف فعالیت‌های ذهنی که افراد از آن‌ها آگاهی کامل ندارند (تفکر نیمه‌آگاهانه)، کارهای روزانه فرد که به‌صورت مشخص انجام می‌گیرد، کارهایی که نیازمند توجه یا تلاش مستقیم‌اند، کارهایی که نیازمند توجه بیشتر و نیازمند سطح خاصی از تجربه هستند، همگی جزو تفکر ریاضی به حساب می‌آیند (ماوسلی[2]، ۲۰۰۵). ضمناً، تعریف توسعه تفکر ریاضی نیز آسان نیست. شونفیلد (۱۹۹۲)، یادگیری تفکر ریاضی را ازنقطه‌نظر معرفت‌شناختی، هستی‌شناسی و تعلیم و تربیت، به معنی توسعه و به‌کارگیری فرآیند ریاضی سازی و تجرید (انتزاع) می‌داند که شایستگی کار با ابزارها را در فهم ساختارهای ریاضی، ایجاد می‌کند. به این دلیل، تفکر ریاضی نقش عمده‌ای در یادگیری مفهومی بازی می‌کند که می‌توان به‌وسیله فعالیت‌های ریاضی متنوع، آن را توسعه داد (هنینگسن و استین[3]، ۱۹۹۷؛ استین و همکاران[4]، ۲۰۰۸). مهم‌ترین ارزش توسعه تفکر ریاضی، کمک به دانش‌آموزان برای تبدیل‌شدن به متفکران ریاضی در مقابل انجام دهندگان یا مسئله حل‌کن‌های صرف است. زیرا یک متفکر ریاضی در مقایسه با یک انجام دهنده یا مسئله حل‌کن، دارای توانایی بیشتری برای یادگیری موقعیت‌های مختلف ریاضی و نگرش استقرایی برای کشف الگوها و درک مفاهیم ریاضی است. به‌طورکلی، یک متفکر ریاضی، سازنده دانش است و فقط، کسب‌کننده دانش نیست (میسن، بورتون و استیسی، ۲۰۱۰).

اگر شخصی بخواهد تفکر ریاضی را یاد دهد یا آن را ارزشیابی کند، بایستی ابتدا تعریف تفکر ریاضی را بداند. در حالی که توانایی یادگیری مفاهیم مختلف ریاضی با هم فرق دارند. مثلاً یادگیری شمارش، کاملاً متفاوت از یادگیری اثبات یک قضیه توپولوژی است. همین تنوع، باعث توسعه دیدگاه‌های زیادی در مورد تفکر ریاضی شده است که از آن جمله، می‌توان به دیدگاه‌های روان‌سنجی (کارول[5]، ۱۹۹۶)، شناختی- آموزشی (گینسبرگ[6]، ۱۹۹۶)، شناختی- پردازش اطلاعات (میر و هگرتی[7]، ۱۹۹۶)، و رویکردهای ریاضی (دریفوس و آیزنبرگ[8]، ۱۹۹۶) اشاره کرد

---

[1] Mathematical Thinking
2Moseley
[3] Henningsen and Stein
[4] Stein et al.
[5] Carroll
[6] Ginsburg
[7]Mayer and Hegarty
[8]Dreyfus and Eisenberg

که هرکدام، اهمیت خاص خود را دارد. برای مثال، شناخت ماهیت تفکر ریاضی، برای روان-شناسان اهمیت بیشتری دارد، درحالی‌که شبیه‌سازی تفکر ریاضی، موردتوجه دانشمندان علوم کامپیوتر است. یا این که فرایند یاددهی- یادگیری و آزمودن تفکر ریاضی برای آموزشگران مهم است، اما چگونگی و چرایی کیفیت تفکر ریاضی، توجه محققان حوزه‌های فرهنگی را هم به خود جلب کرده است. بالاخره، فیلسوف‌ها برای فهم صورت‌های تفکر منطقی جدیت داشته‌اند، ولی عامه مردم؛ فقط برای حل مسائل نیازمند تفکر ریاضی هستند (استرنبرگ و بن-زیو[1]، ۱۹۹۶). از منظر نظریه‌پردازان آموزش ریاضی، فعالیت‌های ذهنی متنوعی مانند مثال‌زدن، تخصیص مسئله، تحلیل منطقی، نمادسازی، تکمیل کردن، حذف کردن، اصلاح کردن، مقایسه کردن، مرتب کردن، مشاهده الگوها، توضیح دادن، دلیل آوردن، راستی‌آزمایی و قانع کردن و رد کردن، همگی می‌توانند ویژگی‌های تفکر ریاضی را مشخص نمایند (میسن و همکاران، ۲۰۱۰). این در حالی است که تفکر ریاضی مطابق از دیدگاه روان‌سنج‌ها، دربرگیرنده توانایی‌های عمومی، هوش سیال، حافظه عمومی، درک تصویری وسیع و هوش متبلور در بالاترین سطح است (استرنبرگ و بن‌زیو، ۱۹۹۶). ولی کسانی مانند میر و هیگارتی (۱۹۹۶) که رویکرد پردازش اطلاعات شناختی به تفکر ریاضی دارند، ماهیت حل مسئله ریاضی را شامل فرآیند شناختی منطقی می‌دانند و آن را ترجمه یا بازنمایی ذهنی هر گزاره در مسئله‌های ریاضی معرفی می‌کنند. در حقیقت این فرآیند شناختی، جرح و تعدیل شده مدل چهار مرحله‌ای حل مسئله پولیاست که در آن، مرحله اول تشخیص معنی اولیه هر گزاره در مسئله و تلفیق به معنی بازنمایی ذهنی موقعیت توضیح داده‌شده در مسئله؛ مرحله دوم برنامه‌ریزی یک طرح برای حل مسئله؛ محله سوم اجرا به معنی انجام طرح مثل محاسبات است و تنها به مرحله چهارم مدل پولیا که دوباره‌نگری است، اشاره نشده است. با عنایت به این برداشت، از منظر روان‌سنج‌ها، اساس تفکر ریاضی، «استراتژی مدل-مسئله[2]» برای حل مسئله است. به این معنی که یادگیرنده، موقعیت شرح داده‌شده در مسئله را می‌فهمد و سعی می‌کند که طرحی برای رسیدن به حل آن، مبتنی بر بازنمایی موقعیت مسئله، بریزد. بن زیو[3] (۱۹۹۶) در توضیح این دیدگاه، مدلی معرفی کرده است که در آن، متفکر ریاضی کسی است که سعی می‌کند یک مسئله کمّی را حل کند. خطاهای دانش‌آموزان در این مدل، خطاهای منطقی با دلایل معین هستند، حتی اگر درست نباشند.

[1] Sternberg and Ben-Zee
[2] Problem- Model Strategy
[3] Talia Ben-Zeev

دریفوس و آیزنبرگ[1] (۱۹۹۶)، ویژگی‌های کلیدی تفکر ریاضی را زیبایی‌شناسی (برداشت ریاضی‌دانان از تفکرشان در خصوص ریاضی)؛ اعتمادبه‌نفس (برای درست فکر کردنِ ریاضی)؛ استدلال از طریق استنتاج (برای دیدن روابط بین انواع مختلف مسائل ریاضی)؛ ساختارها (برای دیدن روابط بین حقایق و روابط؛ بازنمایی (برای ترجمه یک مسئله ریاضی به قالب‌های دیداری، نمادی و عددی)؛ استدلال دیداری برای توجیه بازنمایی‌ها؛ تفکر بازگشتی برای حرکت به سمت جلو و دوباره برگشتن به آغاز؛ انعطاف تفکر (باقی نماندن در یک حالت خاص یا روش تفکر درباره مسائل ریاضی)، توصیف کرده‌اند. بسیاری از پژوهشگران نیز، علت پویایی تفکر ریاضی را همین ویژگی‌ها می‌دانند (تال،۱۹۹۱؛ شونفیلد، ۱۹۹۲؛ هارل و همکاران ۲۰۰۶؛ میسن، بورتون و استیسی، ۲۰۱۰). شکل۱، نقشه مفهومی تفکر ریاضی را نشان می‌دهد (کاراداگ[2]، ۲۰۱۰) که هفت دسته اصلی فعالیت‌های مدل‌سازی ریاضی، نمادین کردن ریاضی، بازنمایی، استدلال، تجرید، اثبات کردن و ریاضی‌ورزی[3] را دربر می‌گیرد. به باور زندیه[4] (۲۰۰۴)، ریاضی‌ورزی به فعالیت‌هایی مانند تجربه کردن، حدسیه‌سازی، سازمان‌دهی کردن و اثبات کردن، اطلاق می‌شود.

[1] Dreyfus and Eisenberg
[2] Karadag
[3] Mathematization
[4] Zandieh

شکل ۱: فعالیت‌های تفکر ریاضی (کاراداگ، ۲۰۱۰)

در راستای رویکردهای ریاضی، در اوایل دهه ۱۹۷۰، گروه‌های تخصصی و محققان آموزش ریاضی، چشم‌اندازهایی در مورد چگونگی توصیف تفکر ریاضی پیشنهاد کردند که تقریباً همهٔ آن‌ها، مرتبط با تفکر ریاضی پیشرفته [1] بودند. در این راستا، ابتدا نظریه‌ای برای درک ریاضی دانشگاهی، تبیین شد (تال، ۱۹۹۱). با توجه به تحقیق‌های انجام‌شده درباره ماهیت تفکر ریاضی، سه حوزه نیازمند توجه است که عبارت از مفهوم‌سازی تفکر ریاضی پیشرفته، انجام پژوهش‌های میدانی، و امکان‌سنجی برای کاربست نظریه‌های تبیین شده در موقعیت‌های واقعی کلاس‌های درس در آموزش عالی هستند. نگاهی به سیر تحولی پژوهش‌های انجام‌شده در خصوص تفکر ریاضی پیشرفته، چند مضمون مهم را برجسته می‌کند (نب، ۲۰۱۰) که می‌توان به

[1] Advanced Mathematical Thinking

تمایز تصویر مفهوم و تعریف مفهوم[1] اشاره کرد که چارچوبی برای مشکلات شناختی ریاضی را در حوزه ریاضیات دانشگاهی، بیان نموده است (تال و وینر[2]، ۱۹۸۱).

۳. اهمیت تفکر ریاضی به‌عنوان یک فرآیند در ریاضیات پیشرفته

ریاضی‌دانان، روش‌هایی را برای فرآیند تفکر خلاق جستجو می‌کنند که از طریق آن، امیدوارند که کیفیت تدریس و پژوهش ریاضی در سطح دانشگاه، ارتقاء یابد (تال، ۱۹۹۱). بسیاری از فرآیندهایی که در حل مسئله اتفاق می‌افتد، در تفکر ریاضی نیز رخ می‌دهد؛ هرچند، استنتاج و اثبات، خصوصیت منحصربه‌فرد تفکر ریاضی پیشرفته است. باوجود این، تال (۱۹۹۱) و بعد ارسلان (a ۲۰۱۰)، مشاهده کردند که یاددهی در سطح دانشگاه، عمدتاً بر محصول تفکر ریاضی متمرکز است و کمتر بر فرآیند تفکر ریاضی، تأکید دارد.

همه مفاهیم در ریاضیات پیشرفته، جزو مفاهیم و استنتاجات انتزاعی هستند و یکی از وجوه تمایز بین تفکر ریاضی مقدماتی و پیشرفته، مربوط به سطح پیچیدگیِ تفکر ریاضی، و چگونگی پرداختن به آن است (دریفوس، ۱۹۹۱). طی چند سال، تلاش‌های گسترده‌ای برای تبیین ویژگی‌های تفکر ریاضی پیشرفته، توسط «گروه کاری تفکر ریاضی پیشرفته[3]» در «کنفرانس بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی[4]» (PME) که سالانه برگزار می‌شود، صورت گرفت. یکی از یافته‌های مهم، تفاوت بین فرآیند و مفهوم، در یادگیری ریاضی بود هم‌چنین، کاپوت[5] (۱۹۹۲) تصریح کرد که نظام‌های بازنمایی ذهنی و ابزارهایی که برای تولید آن‌ها به کار می‌رود، بسیار مهم هستند و در این بین، تکنولوژی به طور مشخص، نقش برجسته‌ای دارد. بنابراین هرچه توصیف ذهنیِ غنی‌تری از یک مفهوم ساخته شود، شخص در درک ریاضی، موفق‌تر خواهد بود. افزون بر این، حرکت از یک بازنمایی ریاضی به بازنمایی دیگر، برای فهم عمیق ایده‌های جدید و شکل‌گیری آن‌ها، بسیار مهم است. هم‌چنین، فرایند ترجمه که از طریق آن، بازنمایی‌های مختلف به هم پیوند داده می‌شوند، اهمیت ویژه‌ای دارد که در مسائل کاربردی، نمود بیشتری پیدا می‌کند (دریفوس، ۱۹۹۱). برای مثال، در یک معادله دیفرانسیل درجه دوم با ضرایب ثابت،

---

[1] Concept image and concept definition
[2] Tall and Vinner
[3] Working Group for "Advanced Mathematical Thinking"
[4] Internatinal Group for the Psychology of Mathematics Education: PME
[5] Kaput

مسئله نوسان[1] و راه‌حل‌های آن بر اساس انواع مختلف از حالت‌هایی میرایی ارائه داده می‌شود. برای حل این معادلات، دانشجویان باید درک واضحی از زمینه مسئله کاربردی داشته باشند، تا بتوانند آن را به زبان ریاضی، ترجمه کنند. تمایز بین بازنمایی‌های نمادین، تجسم‌یافته و ذهنی، به‌وسیله نظریه سه دنیای ریاضی تال، شرح داده شده است. در این نظریه، «مدل‌سازی» نقش برجسته‌ای دارد، زیرا در آن، صورت‌های مختلف یک موضوع، نظام یا فرایند، برای ایجاد یک نظریه یا ساختار ریاضی، با هم ترکیب می‌شوند و برای مطالعه رفتار، فرآیند یا شیءِ مدل‌سازی شده، مورد استفاده واقع می‌شوند. یعنی بازنمایی‌های ذهنی، وابسته به مدل‌سازی ریاضی و مدل‌سازی ریاضی، وابسته به موقعیت فیزیکی است و بازنمایی‌های ذهنی فرد در این فرایند، ضروری است (دریفوس، ۱۹۹۱).

۴. فرایند تفکر ریاضی

میسن، بورتون و استیسی (۲۰۱۰) با نگاهی جامع‌تر، معتقدند که تفکر ریاضی، فرآیندی پویاست که افراد را قادر می‌سازد تا درک خود را از ایده‌های ریاضی، عمیق‌تر کنند و همین، باعث ارتقای فهم و درک آنان خواهد شد. از نظر آنان، غنای تفکر ریاضی، بستگی به عمق و قوت فرآیندها و ساختارهای ریاضی دارد که افراد را در ریاضی، توانمند می‌سازد. آن‌ها به چندین مهارت که باعث تقویت و تعمیق تفکر ریاضی می‌شود اشاره کرده‌اند که مهم‌ترین‌شان، تخصیص و تعمیم[2]؛ حدسیه‌سازی و متقاعد کردن[3]؛ تصور کردن و بیان نمودن؛ تأکید کردن و نادیده گرفتن؛ توسیع و تحدید؛ دسته‌بندی و تشخیص ویژگی‌ها[4]؛ تغییر دادن، متنوع کردن، برعکس کردن و امتحان کردن؛ انتخاب کردن، مقایسه نمودن، سازمان‌دهی و مرتب کردن برای فهمیدن ساختارهای ریاضی مانند تعریف‌ها، حقایق، قضیه‌ها و خواص آن‌ها، مثال‌ها، مثال‌های نقض، رویه‌ها و الگوریتم‌ها، بازنمایی نمادین، بیان کردن، دلیل آوردن، اثبات و استدلال و ارتباط بازنمایی‌های یک مفهوم با یکدیگر هستند. میسن، بورتون و استیسی (۲۰۱۰) بر این باورند که از طریق حل یک مسئله ریاضی، می‌توان بسیاری از این توانایی‌ها به خصوص «تصور کردن و بیان نمودن» را در یادگیرندگان ریاضی، ایجاد نمود. از نظر ایشان، «تصور کردن» که شامل همهٔ شکل‌های تصورات ذهنی فرد از مفهوم موردنظر است، و «بیان نمودن» که تجلی آن تصورات است، در

---

[1]Oscillation
[2] Specializing and Generalizing
[3] Conjesturing and Convincing
[4]Classifying and Characterizing

حقیقت، بنیان تفکر ریاضی هستند. علاوه بر این‌ها، فرایند حل مسئله، قابلیت افزایش توانایی‌های «تأکید کردن و نادیده گرفتن»، «توسیع و تحدید» و «طبقه‌بندی» را به خوبی دارد. با این حال، آن‌ها دو مهارت «تخصیص و تعمیم» و «حدسیه‌سازی و متقاعد کردن» را جزو ویژگی‌های اساسی فرایند تفکر ریاضی و از جمله پرکاربردترین‌شان می‌دانند که به این دلیل به طور خاص، به اختصار به آن‌ها پرداخته می‌شود.

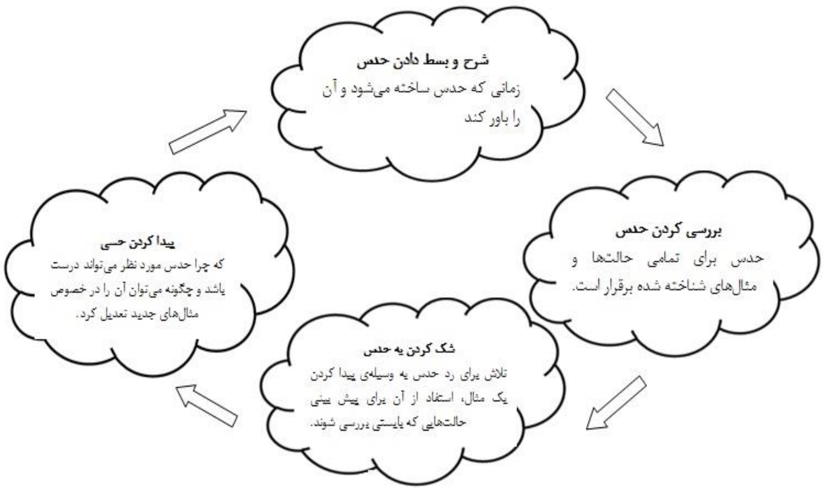
۴-۱. تخصیص و تعمیم

فرآیند تخصیص، به معنی بررسی مثال‌های خاص برای حل یک مسئله ریاضی است. در این معنی، مثال‌های انتخاب‌شده، حالت‌های خاصی از یک موقعیت عمومی در مسئله هستند. معمولاً وقتی که افراد، قادر به حل یک مسئله نیستند و نمی‌توانند جلو بروند، «تخصیص» می‌تواند کمکشان کند تا با درگیرشدن در فرایند حل مسئله، توانایی رسیدن به راه‌حل مناسب را پیدا کنند. اضافه بر این، تخصیص دانش‌آموزان را قادر می‌سازد که حدس‌های بامعنی ارائه دهند و به قول میسن، بورتون و استیسی (۲۰۱۰)، تخصیص با حرکت از «چرا» به سمت «چه چیز»، امکان تبیین آن‌چه را که واقعاً اتفاق می‌افتد، فراهم می‌سازد و الگوی معتبری برای یک مورد خاص، تولید می‌کند. تخصیص به افراد کمک می‌کند که آنچه را می‌دانند، آنچه را می‌خواهند و آنچه را ممکن است، شناسایی کنند. بنابراین از طریق تخصیص، افراد از الگوها پرده‌برداری می‌کنند و این عمل، می‌تواند منجر به تعمیم شود. در بحث تخصیص، فرآیند تعمیم اجتناب‌ناپذیر است و برای حرکت از مثال‌های خاص و حدسیه‌سازی دربارۀ دسته‌های گسترده‌تری از موارد مربوط به آن مسئله، به کار می‌رود و هنگامی‌که فرد، الگوهای ممکن را برای حل یک مسئله درک می‌کند، فرآیند تعمیم آغاز می‌شود. تعاملِ ثابت بین تخصیص و تعمیم، بخش عمده‌ای از تفکر ریاضی است، زیرا به‌وسیله تخصیص، شواهد برای مرحله تعمیم جمع‌آوری می‌شوند. درنتیجه، اگر تخصیص به‌صورت نظام‌وار انجام شود، الگوی تعمیم در بین مثال‌های انتخاب‌شده، مشهودتر است.

۴-۲. حدسیه‌سازی و متقاعد کردن

حدس یک عبارت منطقی است که هنوز درستی آن اثبات نشده است و دلایل آن به‌طور قانع‌کننده‌ای بیان‌نشده، ولی هیچ مثالی هم برای نقض آن پیدا نشده است. در فرآیند تفکر

ریاضی، حدس آگاهانه، می‌تواند از طریق الگوها تولید شده و بعد، با تخصیص‌های بیشتر، به قطعیت نزدیک شود. استدلال آوردن برای فرآیند حدسیه‌سازی، شامل تعمیم‌های بیشتری است که از بیان آنچه ممکن است درست باشد، به‌سوی علت یا «چرایی» درستی آن، حرکت می‌کند (میسن و همکاران، ۲۰۱۰). در مقیاس کوچک‌تر، حدس زدن قلب تفکر ریاضی است (شکل ۲).



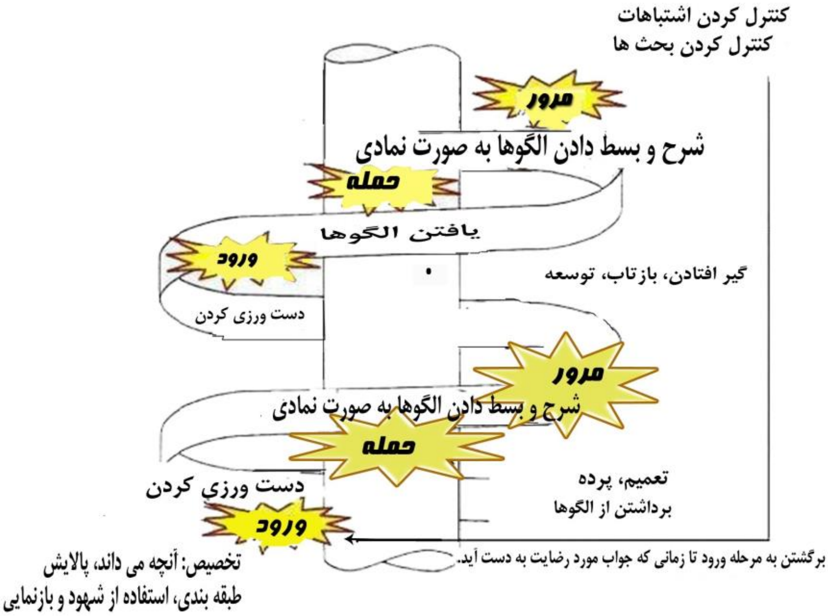
شکل ۲: فرآیند تولید حدس

بنابراین ممکن است مثال‌های نظام‌وار، برای بروز الگوها کافی نباشند. علاوه بر این، برای درگیر شدن با مسئله به‌طور کامل، تخصیص ممکن است دوباره سازمان‌دهی شود و پدیده دوباره کشف کردن، اتفاق بیفتد. برای حدس زدن، «چه چیزی» از «چرا» دشوارتر است و پاسخ به «چرا»، به معنای ارائه دلیل برای همه گزاره‌هایی است که خواننده را متقاعد می‌کند که چیزی درست است.

۴-۳. فرایند پویای تفکر ریاضی

تصویر «فنری شکل» از چارچوب تفکر ریاضی، ابتدا از طرف برونر و همکاران (۱۹۸۶) پیشنهاد داده شد و بعد، توسط میسن توسعه داده شده، در شکل ۳ نشان داده‌شده است. این حرکت به‌صورت فنری است و از تعداد نامعینی حلقه تشکیل می‌شود که در آن، هر حلقه جدید بر اساس فهم و آگاهی دانش‌آموز با توجه به درک حلقه‌های قبلی، ایجاد می‌شود (بورتن، ۱۹۸۴). آگاهی در ریاضی، سهم خاصی در ایجاد توانایی به تصور کشیدن یک مفهوم دارد. بنابراین، هر حلقه، موقعیتی برای ارتقای فهم و آگاهی به‌وسیله دست‌ورزی روی یک ایده، یک موضوع، یک نمودار یا یک نماد فراهم می‌کند. هرچند نتایج این دست‌ورزی، بایستی قابل‌مشاهده و برانگیزاننده و در ضمن، قابل تفسیر باشد (میسن، بورتون و استیسی، ۱۹۸۲). دست‌ورزی، فرایند پیچیده‌ای ایجاد می‌کند که از آن طریق، آن‌چه که وجود دارد، به آن‌چه که انتظار می‌رود، تبدیل می‌شود (بورتن، ۱۹۸۴).

در تفکر ریاضی، مؤلفه‌های عاطفی نیز نیازمند توجه هستند. اگرچه دست‌ورزی، درک کردن الگوها و شرح و بسط دادن فعالیت‌های شناختی، تفکر ریاضی را به جلو هدایت می‌کنند. پاسخ‌های عاطفی، سطح شناختی را به سه صورت «ورود، حمله، و مرور»، هدایت می‌کنند (شکل ۳). در مرحله «ورود»، دانش‌آموز با مسئله درگیر می‌شود که این کار، نیازمند «تخصیص» است. دست‌ورزی با موضوع‌ها، سبب ایجاد «حمله» می‌شود. حدس زدن و متقاعد کردن، منجر به درک وضعیت مسئله شده و بالاخره، درک کردن باعث ایجاد و رشد تعمیم می‌شود و بعد با «مرور»، موقعیت خلق می‌شود (بورتن، ۱۹۸۴؛ میسن، بورتن و استیسی، ۲۰۱۰).



شکل ۳: تفکر ریاضی به‌عنوان یک فرآیند فنری شکل

البته، زینی‌وندنژاد (۲۰۱۴) در پژوهش خود، نشان داد که قدرت ناشی از تفکر ریاضی، تنها در استفاده از مهارت‌هایی مانند تخصیص و تعمیم، و حدس زدن و متقاعدکردن نیست، بلکه دانشجویان از ترکیب این توانایی‌ها، به‌صورت غیرخطی و بسته به شرایط مسئله، برای حل آن بهره می‌برند. این یافته، زمینه را برای درک بهتر « سه دنیای ریاضی[1]» که توسط تال ارائه شده و جهت‌گیری اصلی آن ریاضیات پیشرفته در سطح دانشگاه است، فراهم می‌کند.

۵. سه دنیای ریاضی

مطالعات اخیر تال (۲۰۰۸) در ارتباط با انتقال تفکر از ریاضیات مدرسه‌ای به ریاضیات رسمی در سطح دانشگاه، منجر به تدوین چارچوب نظری «سه دنیای ریاضی» شده است. در این چارچوب، تفکر ریاضی به سه روش تجسم‌سازی مفهومی[2] ، نمادسازی عملیاتی[1] و صورت‌گرایی- اصل

[1]Three Worlds of Mathematics
[2]Conceptual Embodiment

موضوعی[2]، ارائه می‌شود. دنیای تجسم‌سازی مفهومی، شامل درک مفاهیم، تفکر و عمل ریاضی است، اما دنیای نمادسازی فرهومی[3]، شامل محاسبات بر اساس نمادها و روابط صوری و اصول موضوعی است که مبتنی بر انتزاع و اثبات‌هاست. گری و تال[۴] (۲۰۰۱)، چند نوعِ مختلف از اشیای ریاضی را توضیح داده‌اند که یکی از آن‌ها، تجرید تجربی است و هدف آن، مطالعه اشیای ریاضی برای کشف خواص آن‌هاست. تجرید نیمه‌تجربی، بر عملیات روی نمادها تأکید دارد و مفهومی است که به‌صورت ذهنی فهمیده می‌شود. بالاخره، رویکرد صورت‌گرا[5] یا به تعبیر پیاژه، «تجرید بازتابی[6]»، می‌تواند نسخه پالایش‌شده تجرید نیمه‌تجربی در نظر گرفته شود. این دنیا، بر شناسایی الگوها، شباهت‌ها و تفاوت‌ها و تکرار عمل‌ها توسط فرد تا زمانی که بتواند آن‌ها را به‌صورت خودبه‌خودی انجام دهد، متمرکز است (تال، ۲۰۰۸). به باور وی، این دنیا زبانی برای توضیح و پالایش تفکر ریاضی و مبنای توسعه ریاضی است. تال (۲۰۰۸) معتقد است که دنیای تجسم ذهنی، از طریق درک مفاهیم و ساخت و توصیف آن‌ها، باعث توسعه یادگیری فرد می‌شود. هنگامی‌که نظام‌ها به اصول موضوع تبدیل می‌شوند و خواص ریاضی با توجه به آن‌ها، از طریق اثبات‌های رسمی استنتاج می‌شوند، توسعه شناختی از یک مفهوم، به سمت دنیای سوم، یعنی رویکرد صوری-اصل موضوعی حرکت می‌کند. بنابراین، تجسم‌سازی مفهومی، هم به چگونگی مفاهیم تجسم‌یافته ریاضی، و هم در حالت‌های خاص، بازنمایی فرهومی[7] از مفاهیم ریاضی را نیز، شامل می‌شود. بر این اساس، زینی‌وندنژاد (۲۰۱۴)، تعامل بین این سه دنیای ریاضی را در درس معادلات دیفرانسیل، نشان داد (شکل ۴).

---

[1]Operational Symbolism

[2]Axiomatic Formalism

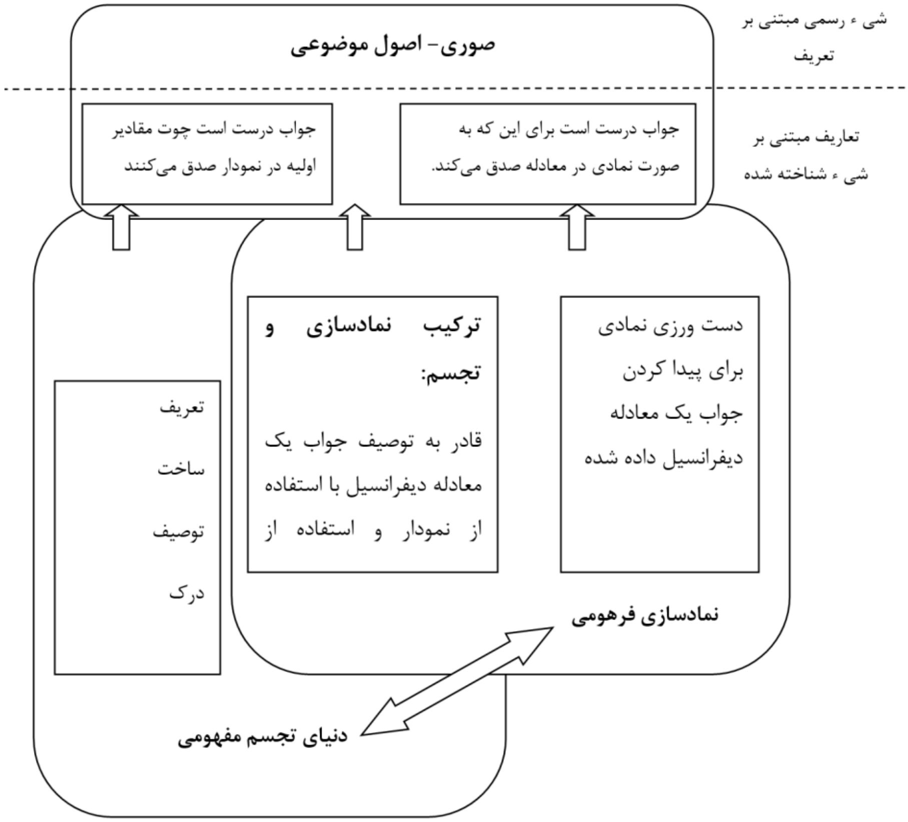
[۳] واژه procept ،ترکیبی از فرآیند (process) و مفهوم (concept) است که اولین‌بار در سال ۱۹۸۶ در ششمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی در اسپانیا، توسط دیوید تال معرفی شد. خانم دکتر گویا، معادل فارسی را «فرهوم» را که ترکیبی از دو واژه بالاست، ساخت. سپس خانم دکتر شیوا زمانی، در همان سال مقاله تال را ترجمه کرد که در مجله رشد آموزش ریاضی سال ۱۳۷۵، چاپ شد.

[۴] Gray and Tall

[5] Formalist

[6] Reflective Abstraction

[7] Proceptual Representations



شکل ۴: سه دنیای ریاضی (تال، ۲۰۰۸)

سه دنیای ریاضی، حرکت بین بازنمایی‌های چندگانه ریاضی را توصیف می‌کنند. در مسیر این حرکت، منظور از نمادسازی فرهومی استفاده از نمادها برای طی یک فرایند و رسیدن به یک نتیجه است. ترکیب فرآیند و مفهوم، یک فرهوم اولیه ایجاد می‌کند و مجموعه‌ای از فرهوم‌های ابتدایی، یک فرهوم وسیع‌تر را ایجاد می‌کنند.

تمایز اصلی بین ریاضیات ابتدایی تجسم‌یافته و نمادین این است که تعریف‌ها در ریاضیات ابتدایی، ریشه در تجارب فرد درباره اشیای ریاضی دارد که خواص آن‌ها به‌عنوان تعریف درآمده

و به‌کار برده می‌شوند. درحالی‌که بازنمایی‌های رسمی در ریاضیات پیشرفته، بر اساس تعریف‌های مبتنی بر نظریه شروع می‌شوند و خواص آن‌ها با استفاده از اثبات‌های رسمی، استنتاج می‌شوند. دانش‌آموزان به روش‌های یکسان، بین این سه دنیا حرکت نمی‌کنند. برای مثال، برخی از افراد در دنیای نمادسازی عملیاتی شروع می‌کنند، هرچند ممکن است کم‌وبیش در کارکردن با نمادها، به‌عنوان مفاهیم قابل دست‌ورزی، مهارت داشته باشند. از طرفی دیگر، برخی از دانش‌آموزان به‌طور طبیعی، از تجربه‌های تجسم‌یافته و نمادین شروع می‌کنند و برخی نیز به‌طور طبیعی، مبتنی بر تعریف‌های نوشتاری عمل می‌کنند (کاپوت، ۱۹۹۲).

تفکر ریاضی از دیدگاه تال (۱۹۹۲)، شامل دو مؤلفه اصلی از جمله اختصاصی کردن مفاهیم ریاضی به‌وسیلۀ تعریف‌های دقیق و استنتاج منطقی قضیه‌ها بر اساس تعریف‌ها و اصول موضوع است. وی معتقد است که دانش‌آموزان، بایستی به‌سوی تفکر پیشرفته ریاضی هدایت شوند و صورت‌بندی شدن و نظام‌وار شدن[1]، مرحله نهایی تفکر ریاضی است. در این راستا، راسموسن و همکاران، یک راهکار برای مشخصه تفکر ریاضی ارائه داده‌اند که بر استفاده از رویه‌های ریاضیِ مهم و صورت‌های کیفی مختلف از فعالیت‌ها تأکید دارد. «فعالیت ریاضی متعالی[2]»، به تفکر ریاضی پیشرفته اطلاق می‌شود که محدود به کلاس خاصی یا سطح محتوایی خاصی نیست و از نظر تال، نسبت به «متعالی» ترجیح دارد، برای این‌که روی پیشرفت دانش‌آموز در طول فعالیت، تأکید دارد. یعنی این حرکت، صورت‌هایی از تحول استدلال دانش‌آموز و پیشرفت وی را نسبت به فعالیت‌های قبلی، نشان می‌دهد. در حقیقت، عبارت تفکر به‌وسیله روان‌شناسان، برای توصیف رشد ریاضی به کار می‌رود و آن‌ها، عبارت فعالیت ریاضی را به جای تفکر، به‌کاربرده‌اند که هم انجام دادن و هم فکر کردن را شامل می‌شود. عبارت فعالیت از دیدگاه آنان، به‌عنوان اولین و پیشگام‌ترین فعالیت انسانی در نظر گرفته شده که در آن، انجام دادن و تفکر، دوگانگی‌هایی هستند که در زمینه‌های اجتماعی و فرهنگی خاص، واقع شده‌اند (راسموسن و همکاران، ۲۰۰۵). آن‌ها فعالیت ریاضیِ متعالی را مبتنی بر سازگار کردن و تعدیل ریاضی‌سازی افقی از قبیل حدس زدن، تجربه کردن و سایر روش‌های غیررسمی و ریاضی‌سازی عمودی نظیر رسمی‌سازی، دلیل

[1]Formalization and Systematization
[2]Advancing Mathematical Activity

آوردن، تعمیم و پیش‌بینی کردن بر اساس شواهد را مطرح نمودند. ضمناً، آن‌ها فعالیت‌های ریاضی‌سازی را در این شیوه، ازجمله نمادسازی، الگوریتم‌سازی و تعریف را نیز، به‌تفصیل بیان کرده‌اند. تعارض بین ریاضی‌سازی عمودی و ریاضی‌سازی افقی، روشی برای مشخصه‌سازیِ فعالیت‌های دانش‌آموز و تعالی فعالیت فراهم می‌کند. جدید را تسهیل می‌کند (راسموسن[1]، ۲۰۰۲؛ راسموسن و همکاران، ۲۰۰۴).

۶. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، تعریف‌ها و دیدگاه‌های موجود در رابطه با تفکر ریاضی، از جمله دیدگاه‌های روان‌سنجی، شناختی-پردازش اطلاعات، شناختی-فرهنگی و رویکردهای ریاضی‌دانان، مرور شد. از بین دیدگاه‌های موجود، دیدگاه تفکر ریاضی از منظر ریاضی‌دانان، به تفصیل بررسی شد و برای آن، تعریف نسبتاً جامعی ارائه گردید. ریاضی‌دانان، تفکر ریاضی را فرآیندی پیچیده و پویا می‌دانند که مشخصه اصلی آن، ساختارهای انتزاعی و پیچیده آن است. ریاضی‌دانان معتقدند که تفکر ریاضی، شامل مهارت‌هایی است که در فرد، توانایی و «قدرت» ویژه‌ای ایجاد می‌کند که هم برای زیستنِ بهتر در هر جامعه‌ای، به افراد کمک می‌کند و هم آن‌قدر آنان را «قدرتمند» می‌کند تا بتوانند به تولید ریاضی بپردازند و در این مقاله، مهم‌ترین آن‌ها معرفی شدند. علاوه بر این‌ها، در این مقاله، تفاوت تفکر ریاضی مقدماتی و پیشرفته با توجه به دیدگاه‌های ریاضی نیز، موردبررسی قرار گرفت که می‌توان مهم‌ترین تفاوت‌ها را در پیچیدگی محتوا و چگونگی مواجه-شدن با آن، و استنتاج و رسمی‌سازی ریاضی، دانست.

هم‌چنین، با توجه به مطالعات انجام‌شده در درس‌هایی نظیر حساب دیفرانسیل و انتگرال (حسابان) و معادلات دیفرانسیل، مهم‌ترین مسئله در یاددهی و یادگیری ریاضی، فقدان تفکر ریاضی برای مدل‌سازی، حل و تفسیر راه‌حل‌هاست (ارسلان، b۲۰۱۰؛ زینی‌وندنژاد و همکاران، ۲۰۱۳). با این وجود، ارتقای تفکر ریاضی در کلاس‌های ریاضی دانشگاهی، با چالش‌های جدی مواجه است (رزلاینی و همکاران ۲۰۱۲؛ یوداریا و تال، ۱۹۹۸) که برای نمونه، می‌توان به تأثیر دیدگاه‌های مختلف نسبت به تفکر ریاضی، فشار ارزشیابی‌های سراسریِ بیرونی مانند کنکور، عدم

[1] Rasmussen et al

استفاده از روش‌های متنوع برای ارزشیابی توانایی‌های ریاضی دانشجویان، کمبود منابع، آشنایی اندک مدرسان ریاضی با چگونگی ارتقای تفکر ریاضی در یادگیرندگان، و نقش تکنولوژی در ارتقای تفکر ریاضی، اشاره کرد.

منابع:

Arslan, S. (2010a). Do students really understand what an ordinary differential equation is*? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 41(7): 873-888.

Arslan, S. (2010b). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. *Teaching Mathematics and its Applications* 29(2): 94-107.

Ben-Zeev, T. (1996). When erroneous mathematical thinking is just as "correct*": The oxymoron of rational errors. The nature of mathematical thinking,* 55-79.

Bruner, J.S., Goodnow, J.J., & Austin, G.A. (1986*). A study of thinking*: Transaction Publishers.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35-49.

Carroll, J.B. (1993). Human cognitive abilities: *A survey of factor-analytic studies*: Cambridge University Press.

Clements, M. A.; & Ellerton, N. F. (1996). *Mathematics Education Research:* Past, Present and Future.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. *Advanced mathematical thinking*, 25-41.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. *The nature of mathematical thinking*, 253-284.

Ginsburg, H.P. (1996). Toby's math. *The nature of mathematical thinking*, 175-202.

Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics.

Harel, G., Selden, A., Selden, J., Gutiérrez, A., & Boero, P. (2006). Advanced mathematical thinking. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*, 147-172.

Kaput, J.J. (1992). *Technology and mathematics education*: Macmillan.

Karadag, Z. (2010). *Analyzing Students' Mathematical Thinking in Technology-supported Environments*. (Doctor of Philosophy), Toronto.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*: Addison-Wesley London.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically:* (New Edition). Addison-Wesley London.

Mayer, R.E., & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. *The nature of mathematical thinking*, 29-53.

Miller, K.F., & Paredes, D.R. (1996). On the shoulders of giants: Cultural tools and mathematical development. *The nature of mathematical thinking*, 83-117.

Moseley, D. (2005). *Frameworks for thinking: A handbook for teaching and learning:* Cambridge Univ Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA. The Author.

Rasmussen, C., Stephan, M., & Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(3), 301-323.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 51-73.

Roach, E., & Lloyd, B.B. (1978). *Cognition and categorization*: Hillsdale, New Jersey.

Ryken, A.E. (2009). Multiple representations as sites for teacher reflection about mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(5), 347-364.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.

Stephan, Michelle, & Rasmussen, Chris. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), 459-490.

Sternberg, R.J., & Ben-Zeev, T. (1996). *The nature of mathematical thinking*: Lawrence Erlbaum.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. *Advanced mathematical thinking*, 3-21.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 495-511.

Tall, David. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24.

Tall, David. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics:* Cambridge University Press.

Treffers, A., &. Vonk, H. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction-The Wiskobas Project*: Reidel Dordrecht.

Yudariah, b. M. Y. and D. Tall (1998). Changing attitudes to university mathematics through problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 37(1): 67-82.

Zeynivandnezhad, Fereshteh, Ismail, Zaleha, & Mohammad Yosuf, Yudariah. (2013). Mathematical Thinking in Differential Equations Among Pre-Service Teachers. *Jurnal Teknologi*, 63(2).

Zeynivandnezhad, F. (2014). *Mathematical Thinking in Differential Equations through a Computer algebra system, Faculty of Education*, (Unpublished doctoral thesis), Universiti Teknologi Malaysia, Kualu Lampur, Malaysia.